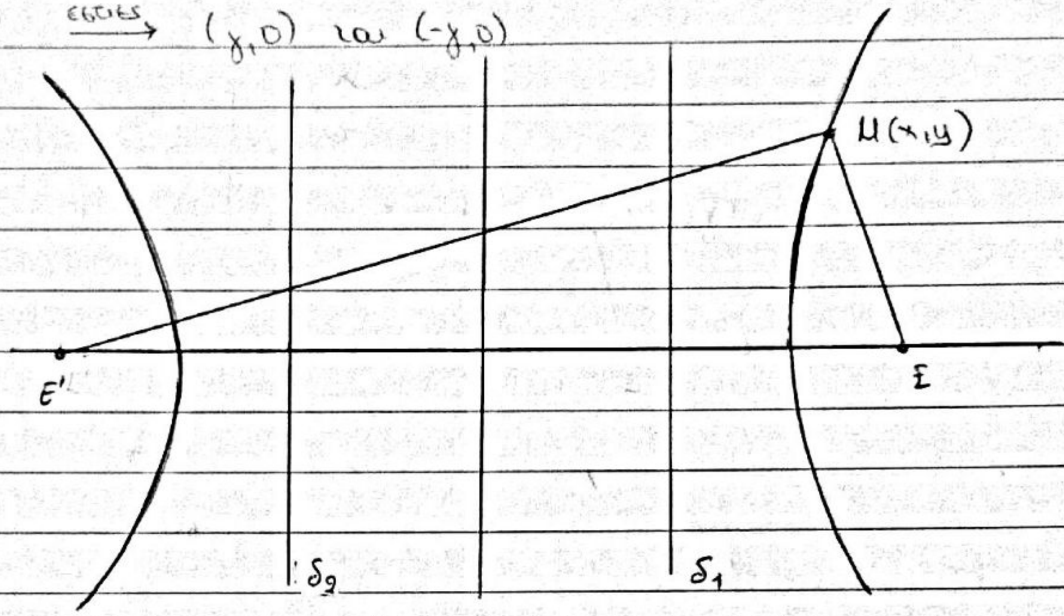
Μάθημα 22ο 25/5/2016

Αναλυτική Γεωμετρία

Υπερβολή: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ όπου $\beta^2 = \gamma^2 - a^2$

$E, E' \xrightarrow{\text{εστίες}} (\gamma, 0)$ και $(-\gamma, 0)$



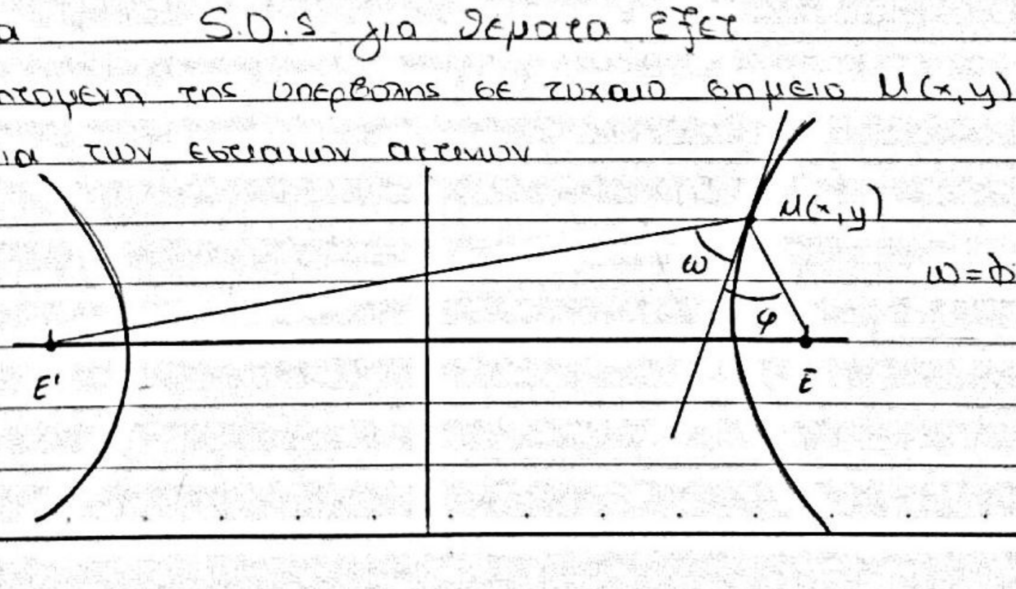
Διευθετούσες : $\delta_1 \ \frac{a^2}{\gamma}$ και $\delta_2 : -\frac{a^2}{\gamma}$

Θεώρημα

Ο λόγος των αποστάσεων τυχόντος σημείου $P(x,y)$ (υπερβολή) με την εστία Ε (αντίστοιχα Ε') και της αντίστοιχης διευθετούσας είναι σταθερός και ίσος με την εκκεντρότητα της υπερβολής

Θεώρημα S.O.S για θέματα Εξετ

Η εφαπτομένη της υπερβολής σε τυχαίο σημείο $M(x,y)$ διχοτομεί τη γωνία των εστιακών ακτινών



Εξίσωση υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$

η Εξίσωση της εφαπτομένης σε τυχαίο σημείο $P_0(x_0, y_0)$

Είναι $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{x_0}{a^2}\right) x + \left(-\frac{y_0}{\beta^2}\right) y - 1 = 0$ (1)

Θέλω διάνυσμα // με την (ε)

Ξέρουμε ότι $\vec{E'M} = (x_0 + \gamma, y_0)$

Από την (1) έχω ότι το διάνυσμα $\vec{n}' = \left(\frac{x_0}{a^2}, -\frac{y_0}{\beta^2}\right) \perp (\varepsilon) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{n} = \left(\frac{y_0}{\beta^2}, \frac{x_0}{a^2}\right) \perp \vec{n}' \perp (\varepsilon)$

Δεν βάζω (-) γιατί θέλω εσωτ. γινόμενο $= 0$

Συνεπώς $\cos\omega = \cos(\vec{E'M}, \vec{n}) = \frac{\langle \vec{E'M}, \vec{n} \rangle}{|\vec{E'M}| \cdot |\vec{n}|} = \ldots$

Αντίστοιχα $\cos\varphi = \ldots$

Ασύμπτωτες

Ορισμός

Έστω $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ υπερβολή. Οι ευθείες $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0$ ορίζονται ως οι ασύμπτωτες της υπερβολής.

⊛ Καλύτερη μορφή $\Rightarrow y^2 = \frac{\beta^2}{a^2} x^2 \Rightarrow y = \pm \frac{\beta}{a} \cdot x$

⊛ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \Rightarrow \frac{\beta^2}{a^2} x^2 - \beta^2 = y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{\beta^2}{a^2} x^2 - \frac{a^2}{a^2} \beta^2 \Rightarrow$

$y^2 = \frac{\beta^2}{a^2}(x^2 - a^2) \Rightarrow y = \pm \frac{\beta}{a} \cdot \sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow y = \pm \frac{\beta x}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$

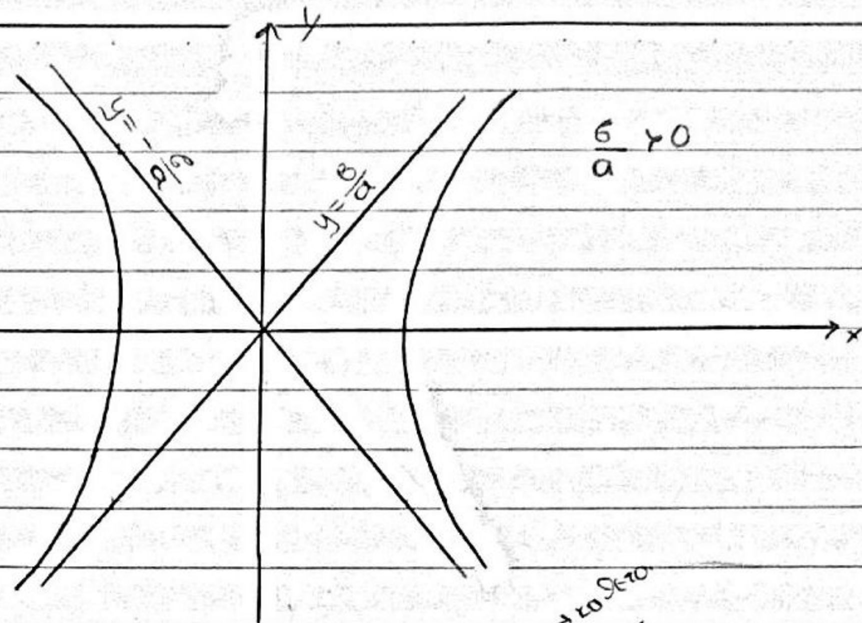
Επαληθεύεται από σημείο της υπερβ.

$\Rightarrow \frac{y}{x} = \pm \frac{\beta}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$ προκύπτει από την Εξ. υπερβ.

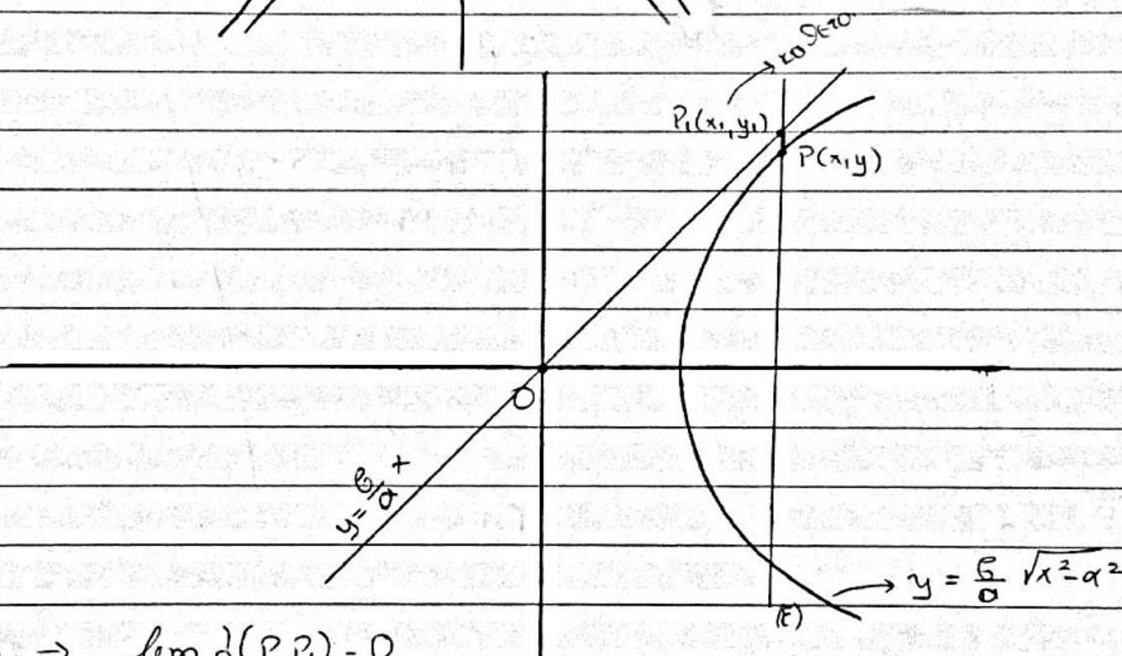
Έστω $\lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\pm \frac{\beta}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \right) = \pm \frac{\beta}{a}$

Άρα τα σημεία $P(x, y)$ της υπερβολής όταν $x \to +\infty$ είναι σημεία της $y = \pm \frac{\beta}{a} x$

. . . .



(*)



$(\varepsilon) \parallel Oy \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} d(P, P_1) = 0$

$$\left.\begin{aligned} P_1(x_1, y_1) &= \left(x_1, \frac{\beta}{\alpha}x_1\right) \\ P(x, y) &= \left(x_1, \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x_1^2 - \alpha^2}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow P_1P = \left(0, \frac{\beta}{\alpha}\sqrt{x_1^2 - \alpha^2} - \frac{\beta}{\alpha}x_1\right) =$$

$$= \left(0, \frac{\beta}{\alpha}x_1\left(\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{x_1^2}} - 1\right)\right)$$

Οπότε $|\vec{P_1P}| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha}x_1\left(\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{x_1^2}} - 1\right)\right)^2} = \frac{\beta}{\alpha}\left|x_1\left(\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{x_1^2}} - 1\right)\right|$

Συζήτηση $\ldots = \dfrac{\alpha\beta}{x_1\sqrt{x_1^2-\alpha^2}} \xrightarrow{x\to+\infty} 0$

$\left\{ \text{Η ασύμπτωτη δεν τέμνει ποτέ την υπερβολή μας.} \right\}$

Παράδειγμα

Να προσδιοριστεί η εκκεντρότητα και οι διευθετούσες της υπερβολής $x^2-4y^2+6x+16y-11=0$.

Μας δηλώνει ότι έχουμε υπερβολή αν ήταν + θα είχαμε έλλειψη

$$x^2-4y^2+6x+16y-11=0 \Rightarrow x^2+6x+3^2-3^2-4y^2+16y+2^2-2^2=0$$

$$\Rightarrow (x^2+6x+3^2)-4(y^2-4y+2^2)+4^2-11=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+3)^2-4(y-2)^2+9=0 \Rightarrow \frac{(x+3)^2}{2^2}-\frac{(y-2)^2}{1}=1.$$

Υπερβολή $\alpha=2,\ \beta=1,\ \gamma=\sqrt{\beta^2+\alpha^2}=\sqrt{5}$

Άρα η εκκεντρότητα: $\varepsilon=\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

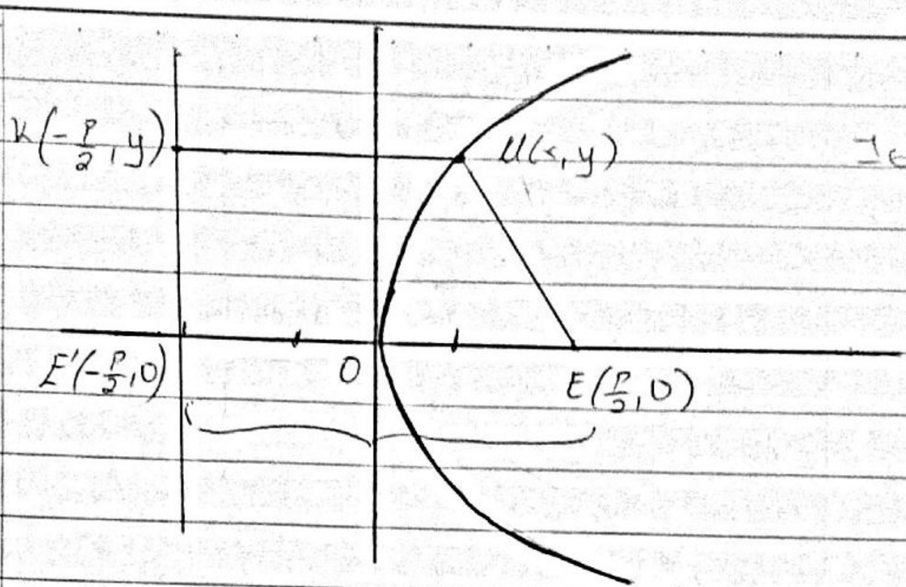
Διευθετούσες: $x+3=\pm\dfrac{\alpha^2}{\gamma} \Rightarrow x=-3\pm\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

Παραβολή

- $y^2=2px$
- Είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από σταθερό Ε και από σταθερή ευθεία (ε)

⊕ Το σταθερό σημείο Ε λέγεται εστία

⊕ Η ευθεία (ε) λέγεται διευθετούσα



Ισχύει:
$|\vec{ME}| = |\vec{MK}|$

Αλλά $\vec{ME} = \left(x - \frac{p}{2}, y - 0\right) = \left(x - \frac{p}{2}, y\right) \Rightarrow |\vec{ME}| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$

$\vec{MK} = \left(x - \left(-\frac{p}{2}\right), y - y\right) = \left(x + \frac{p}{2}, 0\right) \Rightarrow |\vec{MK}| = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}$

- $|\vec{ME}| = |\vec{MK}| \Rightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow$

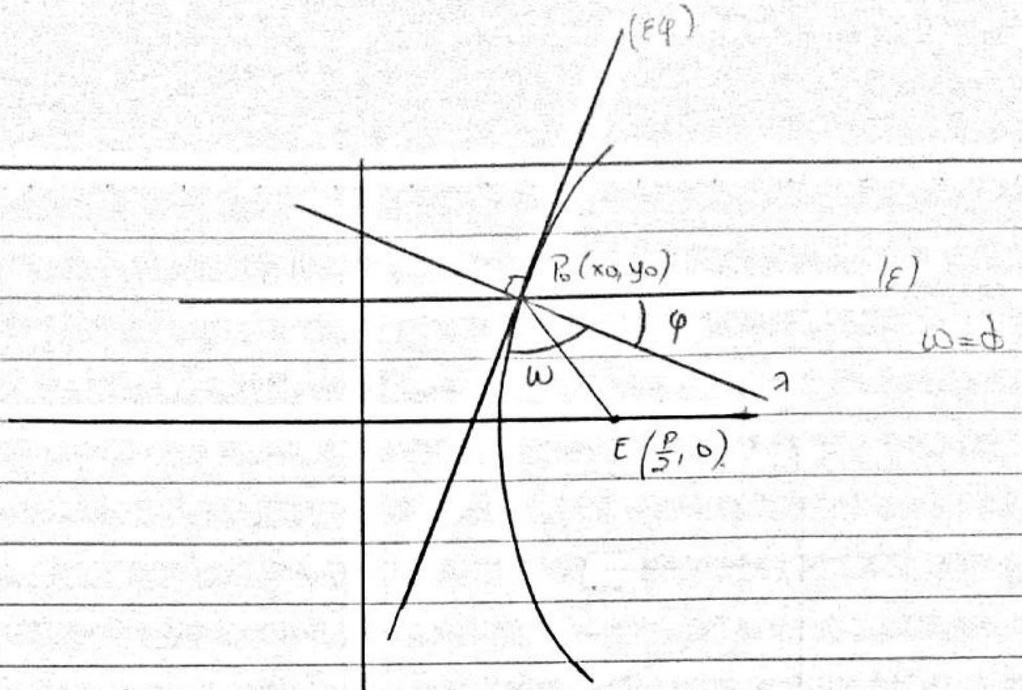
$x^2 - 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow y^2 = 2px$

⑦ Εξίσωση εφαπτομένης
$yy_0 = p(x + x_0)$ στο $P_0(x_0, y_0)$

$\left\{ \begin{array}{l} x^2 = 2py \\ \text{Αλλάζω απλά άξονα} \\ \text{και όλα τα άλλα ίδια} \end{array} \right\}$

Θεώρημα

Η κάθετος σε σημείο $P_0(x_0, y_0)$ της παραβολής $(y^2 = 2px)$ διχοτομεί την γωνία της εστιακής ακτίνας και της ευθείας (ε) που άγεται από το P_0, παράλληλα με τον άξονα παραβολής (xx')



$\vec{P_0E} = -\left(x_0 - \frac{p}{2}, y_0\right)$

→ Κεφ. ευθειων

εφ : $yy_0 = p(x+x_0) \Rightarrow px + (-y_0)\cdot y + px_0 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (p, -y_0) \perp (\varepsilon\varphi)$

$\Rightarrow \vec{n} \parallel$ στην λ $\Rightarrow \cos\omega = \cos(\vec{n}, \vec{P_0E})$

$$\cos\omega = \cos(\vec{P_0E}, \vec{n}) = \frac{\langle \vec{n}, \vec{P_0E} \rangle}{|\vec{n}|\cdot|\vec{P_0E}|} = \frac{p(x_0 - p/2) - y_0^2 \quad ①}{\sqrt{p^2+y_0^2}\cdot\sqrt{(x_0 - p/2)^2 + y_0^2} \quad ②}$$

① $\xrightarrow{y^2=2px}$ $p(x_0 - p/2) - 2px_0 = px_0 - \frac{p^2}{2} - 2px_0 = -\frac{p^2}{2} - px_0 = -p\left(\frac{p}{2} + x_0\right)$

② $\longrightarrow$ $\sqrt{(x_0 - p/2)^2 + y_0^2} = \sqrt{x_0^2 - px_0 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \underbrace{y_0^2}_{2px_0}} =$

$= \sqrt{x_0^2 + px_0 + \left(\frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(x_0 + \frac{p}{2}\right)^2} = x_0 + \frac{p}{2}$

όποτε $\cos\omega = \dfrac{p}{\sqrt{p^2+y^2}}$

Επιφάνειες

Επιφάνεια στο χώρο ορίζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ικανοποιούν εξίσωση της μορφής $\varphi(x,y,z)=0$

π.χ το επίπεδο είναι μια γραμμική εξίσωση $\varphi(x,y,z)=0$

$$\downarrow$$

$$Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$$